ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Вопросы к зачету

1. Метод Гаусса и Жордана-Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
3. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов.
4. Единственность представления вектора через линейно независимый набор векторов.
5. Доказать, что если 1-ый набор векторов линейно выражается через 2-ой и содержит большее число векторов, чем 2-ой, то 1-ый набор векторов линейно зависим.
6. Определение линейного подпространства (ЛП). Примеры ЛП.
7. Базис и размерность ЛП. Док., что в ЛП размерности r любые r линейно независимых векторов составляют базис.
8. Максимальный линейно независимый поднабор (база) набора векторов. Ранг набора векторов.
9. Теорема о ранге матрицы.
10. Теорема Кронекера-Капелли.
11. Теорема о размерности подпространства решений однородной СЛАУ. Фундаментальный набор решений (ФНР) однородной СЛАУ.
12. Размерность и базис линейной оболочки набора векторов. Теорема о задании линейной оболочки, как множества решений некоторой однородной системы линейных упавнений.
13. Доказать, что если два ЛП L_1 и L_2 таковы, что $L_1 \subseteq L_2$ и $\dim L_1 = \dim L_2$, то $L_1 = L_2$.
14. Сумма и пересечение ЛП. Формула Грассмана.
15. Структура общего решения неоднородной СЛАУ. Линейные многообразия (ЛМ). Однозначная определенность подпространства, сдвигом которого получилось данное ЛМ.
16. Размерность ЛМ. 0-мерные, 1-мерные, 2-мерные, (n-1)-мерные ЛМ.
17. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся ЛМ. Доказать, что гиперплоскость не может скрещиваться ни с каким ЛМ.
18. Аффинные оболочки множеств. Доказать, что аффинная оболочка двух прямых не более, чем трехмерна.
19. Операция умножения матриц и ее свойства.
20. Невырожденные и вырожденные матрицы. Доказать, что для любых квадратных матриц $r_{AB} \le \min\{r_A, r_B\}$. Доказать, что если A и B –квадратные матрицы порядка n и AB=E, то r_A=n.
21. Доказать, что если A – квадратная матрица порядка n и rank A =n, то существует единственная матрица B порядка n такая, что AB=E.
22. Обратная матрица. Существование и единственность обратной матрицы для каждой невырожденной.
23. Определение евклидова пространства.
24. Длина вектора и угол между векторами. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника.
25. Ортогональные векторы. Ортогональный базис. Доказать, что система попарно ортогональных векторов – линейно независима.
26. Доказать, что для любого вектора f и любого подпространства L существует и единственно разложение (теорема о проекции):
$$f = g + h, \quad где\ g \in L\ \ и\ \ h \in L^{\perp}.$$
27. Свойства ортогональных дополнений $L^{\perp}$ к ЛП L.
28. Алгоритм построения общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым в E_3.
29. Доказать, что если два ЛМ не пересекаются, то существует общий к ним перпендикуляр.
30. Доказать, что если два ЛМ $H_1 = c_1 + L_1$ и $H_2 = c_2 + L_2$ не пересекаются, то направление общего к ним перпендикуляра определено однозначно; если при этом $L_1 \cap L_2 = 0$, то и сам перпендикуляр (прямая) определен однозначно.
31. Несовместные системы линейных уравнений и метод наименьших квадратов. Матрица Грама. Псевдорешения несовместных систем.